« المحاضرة النظرية السادسة »

سندرس في هذه المحاضرة الأفكار التالية:

1) تذكرة بالمؤثر الخطي

2) المؤثر الخطي المعكوس مع أمثلة عنه

المؤثر الخطي: هو تطبيق خطي مستقره ومنطلقه نفس الفضاء الشعاعي

$V \to V : T$ إن T مؤثر خطي على V

مبرهنة: $d(Hom(V,V)) = d(V) \cdot d(V)$

ملاحظة: نرمز لمجموعة كل المؤثرات الخطية على الفضاء V بالرمز $L(V)$

حيث أن $d(L(V)) = d(V) \cdot d(V) = (d(V))^2$

معكوس مؤثر خطي:

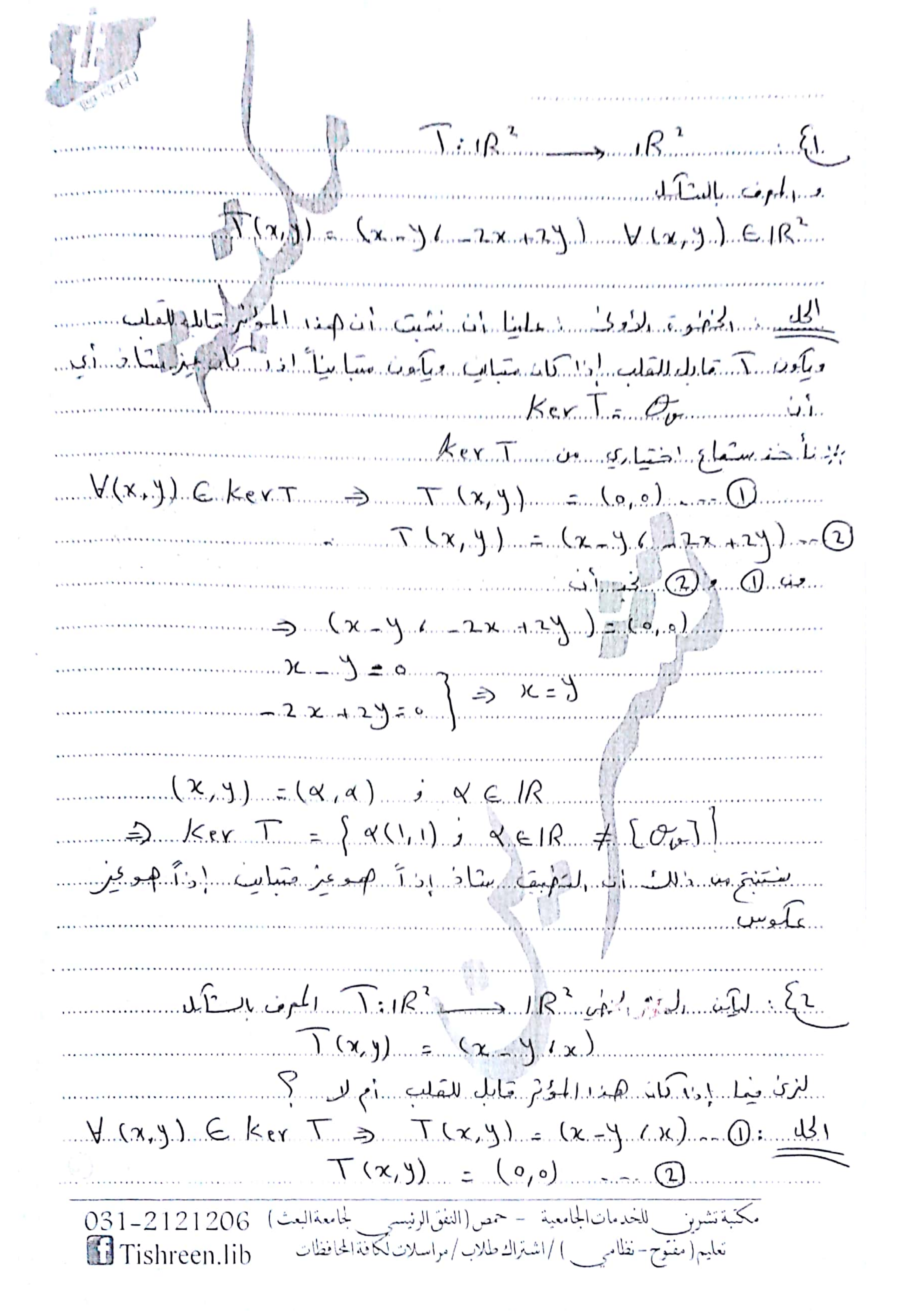
يكون المؤثر الخطي $V \to V : T$ مؤثر قابل للقلب أو معكوس اذا كان متبايناً أو غامراً

نرمز لمعكوس المؤثر الخطي بالرمز $V \to V : T^{-1}$ وذلك في حال وجوده

ملاحظة: يكون التطبيق $W \to V : f$ تطبيقاً معاكساً إذا كان f تطبيقاً متبايناً وتطبيقاً غامراً

أمثلة على ذلك:

أوجد معكوس كل من المؤثرات الخطية التالية في حال وجوده



ع1: $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

والمعرف بالشكل

$T(x,y) = (x-y, -2x+2y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

الحل: الخطوة الأولى: علينا أن نثبت أن هذا المؤثر قابل للقلب ويكون T قابل للقلب إذا كان متباين ويكون متباينا إذا كان غير شاذ أي أن $Ker\, T = \{\theta_{\mathbb{R}^2}\}$

∴ نأخذ شعاع اختياري من $Ker\, T$

$\forall (x,y) \in Ker\, T \Rightarrow T(x,y) = (0,0)$ ... (1)

$T(x,y) = (x-y, -2x+2y)$ ... (2)

من (1) و (2) نجد أن

$\Rightarrow (x-y, -2x+2y) = (0,0)$

$$\left.\begin{matrix} x-y=0 \\ -2x+2y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=y$$

$(x,y) = (\alpha, \alpha) \;;\; \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow Ker\, T = \{\alpha(1,1) \;;\; \alpha \in \mathbb{R}\} \neq \{\theta_{\mathbb{R}^2}\}$

نستنتج من ذلك أن التطبيق شاذ إذاً هو غير متباين إذاً هو غير عكوس

ع2: ليكن المؤثر الخطي $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ المعرف بالشكل

$T(x,y) = (x-y, x)$

لنرى فيما إذا كان هذا المؤثر قابل للقلب أم لا؟

الحل: $\forall (x,y) \in Ker\, T \Rightarrow T(x,y) = (x-y, x)$ ... (1)

$T(x,y) = (0,0)$ ... (2)

من ① و ② نجد أن $(x, y, x) = (0, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = 0$$

$\Rightarrow (x, y) = (0, 0) \Rightarrow \ker T = \{\theta_{\mathbb{R}^2}\}$

أي أن المؤثر غير شاذ وهو متباين وبالتالي هو عكوس

الطلب الثاني: أوجد شكل المؤثر الخطي المعكوس $T^{-1}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$T^{-1}(x, y) = (a, b)$$

$\Rightarrow T(a, b) = (x, y)$ ...... ①

$T(a, b) = (a - b, a)$ ...... ②

من ① و ② نجد أن

$$(x, y) = (a - b, a)$$

$$\left.\begin{array}{l} a - b = x \\ a = y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = y \\ b = y - x \end{array}$$

$$\Rightarrow T^{-1}(x, y) = (y, y - x)$$

وهو شكل المؤثر الخطي المعكوس

3)

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(x, y) = (y, x + 2y)$$

الحل:

$\forall (x, y) \in \ker T \Rightarrow T(x, y) = (0, 0)$ ...... ①

$T(x, y) = (y, x + 2y)$ ...... ②

من ① و ② نجد

$$(y, x + 2y) = (0, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = x = 0$$

$$\Rightarrow (x, y) = (0, 0) \Rightarrow \ker T = \{0_{R^2}\}$$

المؤثر جيد شامل فهو متباين وبالتالي هو ما ك وسين

الطلب الثاني : أوجد شكل المؤثر الخطي المعكوس

$$T^{-1}(x, y) = (a, b)$$

$$\Rightarrow T(a, b) = (x, y) \quad ---- (1)$$

$$T(a, b) = (b, a + 2b) \quad ---- (2)$$

من (1) و (2) نجد أن $(x, y) = (b, a + 2b)$

$$\left.\begin{array}{l} b = x \\ a + 2b = y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b = x \\ a = y - 2x \end{array}$$

$$\Rightarrow T^{-1}(x, y) = (y - 2x, x)$$

وهو المطلوب

<< انتهت المحاضرة السادسة >>

<< مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح >>

إعداد : فاطمة الشمسيني